

## Моделирование механических процессов в струйной мельнице кипящего слоя на основе уравнения Больцмана

Жуков В.П., Otwinowski H., доктора техн. наук, Беляков А.Н., Urbaniak D., кандидаты техн. наук

На основе уравнения Больцмана предложено обобщенное описание совмещенных процессов движения, измельчения и классификации сыпучих материалов. Приведено сравнение результатов расчетных и экспериментальных исследований совмещенных процессов измельчения и классификации материала в струйной мельнице кипящего слоя.

*Ключевые слова:* уравнение Больцмана, механические процессы, измельчение, классификация, движение, сыпучие материалы.

## Modelling of Mechanical Processes in Jet Mill of Boiling Bed based on Boltzmann equation

V.P. Zhukov, H. Otwinowski, Doctors of Engineering, A.N. Belyakov, D. Urbaniak, Candidates of Engineering

The authors suggest a generalized description of the combined processes of motion, grinding and classification of granular materials based on the Boltzmann equation. The authors compare the calculated and experimental results of the combined processes of grinding and material classification in the jet mill of boiling bed.

*Key words:* the Boltzmann equation, mechanical processes, grinding, classification, transportation, granular materials.

Спецификой работы струйной мельницы кипящего слоя [1, 2] является совместное протекание в рабочем объеме процессов движения, измельчения и классификации сыпучих материалов. Традиционно [3] описание измельчения и классификации выполняется отдельно, а описание всей установки синтезируется из моделей отдельных процессов. Такой подход оправдан для линейных независимых процессов, для которых возможна такая суперпозиция моделей. Для более общего случая нелинейных и взаимосвязанных процессов предлагается использовать уравнение Больцмана [4], в котором искомая функция распределения массы по выбранным определяющим координатам автоматически учитывает взаимное влияние процессов. Ниже предлагается описание взаимосвязанных процессов в струйной мельнице на основе уравнения Больцмана.

Объектом исследования является струйная мельница кипящего слоя, схема потоков в которой показана на рис.1,а. Исходный материал загружается в размольную камеру, туда же компрессором через сопла (рис. 1,а, стрелки) нагнетается воздух. Поток воздуха частицы разгоняются и приобретают необходимую для измельчения энергию. При столкновении частиц с другими частицами и со стенками аппарата происходит их измельчение. Мелкие осколки выносятся из слоя и направляются в бункер готового продукта. Крупные частицы остаются в мельнице и продолжают измельчаться заданное время или до достижения заданных технологических параметров.

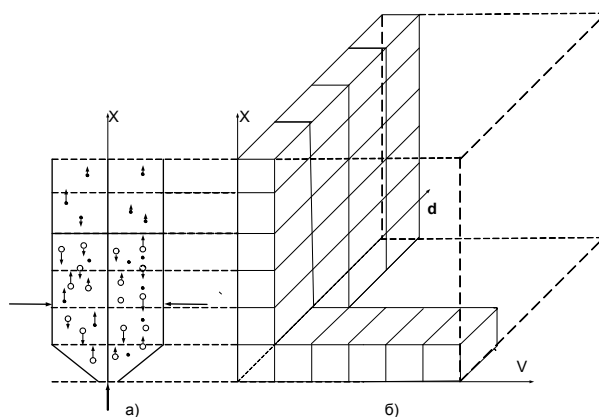


Рис. 1. Схема потоков (а) и структура фазового пространства (б) в струйной мельнице кипящего слоя

Для построения модели мельницы выбирается набор определяющих координат для искомой функции распределения. Считается, что частицы материала в поперечном сечении мельницы интенсивно перемешиваются, поэтому распределение материала в поперечном сечении не рассматривается. В качестве определяющей геометрической координаты выбирается вертикальная ось  $x$ . В качестве второй координаты фазового пространства выбирается скорость движения частицы в вертикальном направлении  $v$ . Преобразование размера частиц при измельчении описывается изменением функции распределения вдоль третьей координаты размера зерен  $\delta$ . Структура трехмерного фазового пространства для искомой плотности распределения в струйной мельнице кипящего слоя приведена на рис.1,б.

Искомая плотность распределения зависит от трех выбранных фазовых координат и времени –  $f(x, v, \delta, t)$ , а уравнение Больцмана [5] для рассматриваемого случая принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_k f}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f}{\partial v_k} = -fS + \int_{\delta}^{\delta_{\max}} f S b d\varepsilon, \quad (1)$$

где  $S, b$  – селективная и распределительная функции разрушения [3];  $a$  – ускорение;  $\delta, \varepsilon$  – наблюдаемый и текущий размеры частиц.

Решением кинетического уравнения Больцмана является функция распределения массы материала в выбранном фазовом пространстве. Произведение функции  $f(x, v, \delta, t)$  на элементарный объем  $dV = dx dv d\delta$  показывает вероятность в момент времени  $(t, t + dt)$  частицы размера  $(\delta, \delta + d\delta)$ , находящейся в точке с координатами  $(x, x + dx)$ , двигаться со скоростью  $(v, v + dv)$ . Известный вид функции распределения позволяет определить гранулометрические составы продуктов и их массовые потоки в заданном сечении или объеме, то есть найти технологические характеристики процесса.

Уравнение (1) записывается для получения численного решения в конечно-разностной форме

$$f_{i,j,k}^{t+1} = f_{i,j,k}^t \left( 1 - \frac{v_j \Delta t}{\Delta x} - \frac{a \Delta t}{\Delta v} - s \Delta t \right) + f_{i-1,j,k}^t \frac{v_j \Delta t}{\Delta x} + f_{i,j-1,k}^t \frac{a \Delta t}{\Delta v} + \sum_{\Delta=1, n-k} f_{i,j,k+\Delta}^t s_{k+\Delta} b_{k+\Delta, k} \Delta t, \quad (2)$$

где  $\Delta x$  – размер ячейки вдоль оси  $x$ ;  $\Delta v$  – размер ячейки вдоль оси  $v$ ;  $\Delta \delta$  – размер ячейки вдоль оси  $\delta$ ; нижние индексы  $i, j, k$  – номер ячейки вдоль фазовых координат  $x, v, \delta$  соответственно; верхний индекс  $t$  – номер шага по времени.

Вводя новые обозначения

$$p^x = v \Delta t / \Delta x, \quad p^v = a \Delta t / \Delta v, \quad p^\delta = S \Delta t \quad (3)$$

и подставляя их в (2), получаем

$$f_{i,j,k}^{t+1} = f_{i,j,k}^t \left( 1 - p^x_{i,j,k} - p^v_{i,j,k} - p^\delta_{i,j,k} \right) + f_{i-1,j,k}^t p^x_{i-1,j,k} + f_{i,j-1,k}^t p^v_{i,j-1,k} + \sum_{\Delta=1, n-k} f_{i,j,k+\Delta}^t p^\delta_{i,j,k+\Delta} b_{k+\Delta, k},$$

где  $p^x, p^v, p^\delta$  – вероятности перехода материала из ячейки вдоль координат  $x, v, \delta$ .

Отрицательные слагаемые в правой части (4) определяют уход материала из ячейки, а положительные – приход в нее частиц из других ячеек.

Для решения уравнения Больцмана (1) с учетом разностной схемы (4) разработан универсальный метод [6]. Многомерное фазовое пространство делится на ячейки аналогично рис. 1,б. Полученные ячейки перестраиваются вдоль прямой таким образом, что адрес ячейки определяется одним, а не тремя индексами. Состояние моделируемой системы задается матрицей–

строкой, значение каждого элемента которой находится произведением искомой плотности распределения на объем ячейки.

Обозначим через  $N$  число координат или размерность задачи. Вдоль каждой координаты процесса число выбранных ячеек (или шагов) обозначим  $n_i$ , где индекс  $i = 1, 2, \dots, N$  показывает порядковый номер координаты. Общее число анализируемых ячеек  $n$  будет определяться произведением  $N$  чисел:  $n = n_1 * n_2 * \dots * n_N$ . Вектор состояния системы  $\mathbf{S} = \{S_i\}$  размера  $1 * n$  составляется из вероятностей попадания материала в  $i$ -ю ячейку:  $S_i = f \Delta V$ . Сумма этих вероятностей из условия нормировки, которое имеет смысл сохранения массы, равна единице:  $\sum_i S_i = 1$ .

Для описания эволюции системы во времени согласно (4) для каждой ячейки вводится случайная величина  $Y_i$ , которая определяется множеством значений, которые она может принимать, и множеством соответствующих им вероятностей:

$$Y_i = \{y_1, y_2, \dots, y_{m_i}\}, \quad (5)$$

$$Q_i = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_i}\},$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_{m_i}$  – номера ячеек, куда возможен переход из ячейки  $i$  с вероятностями  $q_1, q_2, \dots, q_{m_i}$ ;  $m_i$  – число ячеек, в которые возможен переход из ячейки  $i$ . В соответствии с условием нормировки сумма вероятностей возможных переходов равна единице  $\sum q = 1$ .

С другой стороны, для описания эволюции системы во времени может быть использована цепь Маркова и переходная матрица размера  $n * n$ , которую, однако, в силу большого числа нулевых элементов целесообразно использовать только для одномерных или двумерных задач. Предлагаемый метод расчета оперирует с адресами только ненулевых переходов и соответствующими им вероятностями и требует минимального объема машинной памяти, что особенно актуально при решении многомерных задач.

Если переход в многомерном фазовом пространстве разрешен только в соседние ячейки, адреса возможных переходов записываются следующим образом:  $Y_i = \{i, i \pm 1, i \pm n_1, i \pm n_1 n_2, \dots, i \pm n_1 n_2 \dots n_{m_i-1}\}$ .

Адрес  $i$  означает остаться в наблюдаемой ячейке, адрес  $i \pm 1$  – переход в правую или левую ячейку, адрес  $i \pm n_1$  – переход в ячейки, расположенные в фазовом пространстве на строку выше или ниже ячейки с номером  $i$  (рис. 1,б), и т. д. Вероятности переходов  $q$  определяются из физических условий протекания процессов.

Для описания перехода системы из одного состояния в другое за время  $\Delta t$  используется специальный матричный оператор

$$\mathbf{S}^{t+1} = \hat{p}(Y, \mathbf{S}^t), \quad (6)$$

где верхний индекс  $t$  показывает номер шага по времени.

Матричный оператор  $\hat{p}$  в выражении (6) может быть определен (заменен) тождественным суммированием возможных переходов в рассматриваемую  $i$ -ю ячейку из всех  $n$  ячеек системы:

$$S_i^{t+1} = \sum_{j=1, n} S_j^t p_{ij}, \quad (7)$$

где  $p_{ij}$  – вероятность перехода из  $j$ -й ячейки в  $i$ -ю, которая определяется согласно

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{j1} & \text{при } y_{j1} = i, \\ 0 & \text{при } y_{j1} \neq i, \end{cases}$$

где  $j_1 = 1, m_j$ .

Для проведения расчетов для струйной мельницы по предложенной методике для каждой ячейки определяются вероятности переходов согласно (3). На частицу в вертикальном канале действуют две силы: тяжести и сопротивления. При известном расходе газа и скорости воздуха в каждом сечении аппарата  $w(x)$  сила сопротивления находится из выражения [7]

$$F_s = k_f(w(x) - v)^n,$$

где коэффициент сопротивления  $k_f$  и параметр  $n$  определяются законом сопротивления [7]. Выражение для ускорения частицы из второго закона Ньютона записывается в виде

$$a = g - \frac{k_f}{m}(w(x) - v)^n. \quad (8)$$

При измельчении материала истиранием считается, что от исходной частицы откалываются только мелкие осколки, а масса частиц фракции после разрушения переходит только в два класса крупности: мелкий и соседний (рис. 2). Вероятности перехода частицы при разрушении из фракции  $j$  во фракцию  $l$  за время  $\Delta t$  или распределительная функция разрушения определяются соотношением [8]

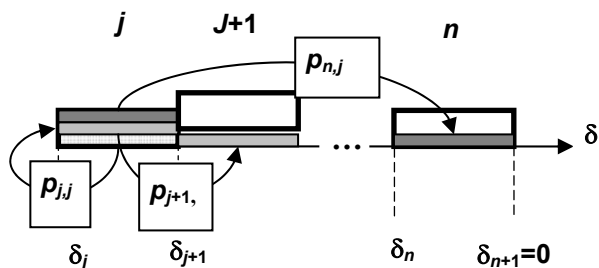


Рис. 2. Схема материальных потоков (вероятностей) при истирании частиц  $j$ -ой фракции ( $n$  – номер самой мелкой фракции)

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 - S_j, & i = j, \\ \frac{S_j \delta_{j+1}^k}{\delta_{j+1}^k + \delta_n^k}, & i = j + 1, \\ \frac{S_j \delta_n^k}{\delta_{j+1}^k + \delta_n^k}, & i = n, \\ 0, & i \neq j, j + 1, n, \end{cases} \quad (9)$$

где  $k$  – параметр, соответствующий форме разрушаемых частиц:  $k = 1$  для частиц линейной структуры,  $k = 2$  – пластинчатой,  $k = 3$  – кубической; индексы показывают номера фракций.

Селективная функция измельчения для закона Риттенгера, согласно [3], находится из выражения  $S = \alpha \delta$ .

Экспериментальные исследования совмещенных процессов проводились для периодического измельчения кварцевого песка в струйной мельнице кипящего слоя. В мельницу загружалась порция материала с известным гранулометрическим составом и измельчалась там в течение 10 мин. После этого определяли массу и гранулометрический состав готового продукта.

При проведении расчетов считалось, что материал вдоль осей  $x$  и  $v$  может переходить только в соседние ячейки. Число шагов (ячеек) вдоль оси  $x$  – 10, число классов скоростей – 10, число классов крупности – 33. Общее число анализируемых ячеек составило  $10 \times 10 \times 33 = 3300$ .

Вероятность перехода частиц по оси  $x$  определяется согласно (4) с учетом знака скорости. Если скорость отрицательная, то частицы движутся вниз и полученная вероятность перехода определяет долю частиц, перешедших в нижнюю ячейку, а для положительной скорости – в верхнюю ячейку. Вероятность переходов вдоль оси  $v$  определяется согласно (3) с учетом (7). Для определения вероятности перехода по оси  $\delta$  используется выражение (8).

Исходный материал подается в ячейку с  $x = 0$  и  $v = 0$ . Расчетное время составляет 600 с.

Готовый продукт определяется по содержанию верхних ячеек при положительной скорости движения частиц.

В качестве параметра идентификации модели используется коэффициент селективной функции  $\alpha$ . Расчетная доля выноса материала в циклон подбирается равной экспериментальному выносу (18,3 %) за счет выбора значения параметра идентификации.

Сопоставление расчетных и экспериментальных результатов приводится на рис. 3. Результаты численных экспериментов согласно (6) показаны линиями, результаты эксперимента – точками. Штриховая линия соответствует гранулометрическому составу исходного порошка. Результаты численных экспериментов удовлетворительно описывают гранулометрический состав готового продукта.

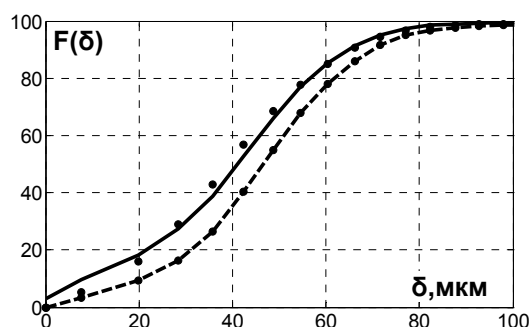


Рис. 3. Сопоставление расчетных (сплошная линия) и экспериментальных (точки) гранулометрических составов  $F(\delta)$  — проход через контрольное сито) измельченного материала. Штриховой линией показан гранулометрический состав материала до измельчения

Сопоставление объема оперативной компьютерной памяти, необходимой для решения рассмотренной задачи, с помощью предлагаемого метода и цепей Маркова проводилось следующим образом. Матрица переходных вероятностей при использовании цепей Маркова имеет размер  $3300 \times 3300 = 10890000$  элементов. Если для хранения каждого элемента требуется 6 байт памяти, то объем оперативной памяти для хранения всей матрицы составляет почти 66 Мбайт. При использовании предлагаемого метода решения объем памяти составляет  $3300 \times 6 \times 2 = 0,2$  Мбайт. То есть

машинные ресурсы при использовании предлагаемого метода экономятся более чем в 100 раз.

При увеличении размерности фазового пространства преимущество предлагаемого метода еще более увеличивается, что делает принципиально возможным решение сложных многомерных задач.

#### Список литературы

1. Palaniandy S., Azizli K., Hussin H., Hashim S. Effect of operational parameters on the breakage mechanism of silica in a jet mill // Minerals Engineering. — 2008. — 21.
2. Fukunak T., Golmanb B., Shinohara K. Batch grinding kinetics of Ethenzamide particles by fluidized-bed jet-milling // International Journal of Pharmaceutics. — 2006. — 311.
3. Mizonov V., Zhukov V., Bernotat. Simulation Of Grinding: New Approaches. — Ivanovo: Ispu Press, 1997.
4. Вулис Л.А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений. — М.: Атомиздат, 1971.
5. Жуков В.П., Беляков А.Н. Моделирование и расчет совмещенных процессов на основе уравнения Больцмана // Изв. вузов. Химия и химическая технология. — 2010. — Т. 53. — Вып. 11. — С. 114–117
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Расчет многомерных совмещенных процессов измельчения, классификации в сыпучих средах №2010612671 от 19 апреля 2010 года» / А.Н. Беляков, В.П. Жуков, А.А. Власюк, А.Е. Барочкин.
7. Мизонов В.Е., Ушаков С.Г. Аэродинамическая классификация порошков. — М.: Химия, 1989. — 160 с.
8. Огурцов А.В. Метод расчета струйной мельницы кипящего слоя // Изв. вузов. Химия и химическая технология. — 2004. — Т. 47. — Вып. 10. — С. 122–124.

*Беляков Антон Николаевич,*

ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат технических наук, докторант кафедры прикладной математики, телефон (4932) 26-97-45.

*Жуков Владимир Павлович,*

ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov@ispu.ru

*Otwinowski Henryk.,*

Ченстоховский политехнический институт (Польша), доктор технических наук, профессор, e-mail: otwinowski@kkt.pcz.czest.pl

*Urbaniak Darek,*

Ченстоховский политехнический институт (Польша), кандидат технических наук, e-mail: otwinowski@kkt.pcz.czest.pl